

Компактная разностная схема без итераций для двумерного уравнения Гинзбурга – Ландау

В. И. ПААСОНЕН^{1,2,*}, М. П. ФЕДУРУК^{2,1}

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Паасонен Виктор Иванович, e-mail: paas@ict.nsc.ru

Поступила 24 марта 2022 г., доработана 09 июня 2022 г., принята в печать 28 июня 2022 г.

Работа представляет собой продолжение цикла исследований авторов, посвященных высокоточным компактным схемам для уравнений нелинейной волоконной оптики. На основе классической компактной схемы Микеладзе формулируется двухслойная безытерационная схема четвертого порядка точности типа предиктор-корректор для двумерного уравнения Гинзбурга – Ландау. Одновременно построен аналогичный безытерационный вариант широко известной схемы Кранка – Николсон. Исследована устойчивость схем и проведено их сравнение на ряде модельных задач. Среди них задачи Дирихле и задачи с периодическими краевыми условиями для различных начальных данных, а также задача распространения плоской волны. По расчетам на последовательности сгущающихся сеток получены апостериорные оценки ошибки и реального порядка точности схем в равномерной и квадратичной норме.

Ключевые слова: уравнение Гинзбурга – Ландау, компактная разностная схема, повышенный порядок точности, схема без итераций, нелинейная волоконная оптика.

Цитирование: Паасонен В.И., Федорук М.П. Компактная разностная схема без итераций для двумерного уравнения Гинзбурга – Ландау. Вычислительные технологии. 2022; 27(6):58–69. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.006.

1. Постановка задачи

Уравнение Гинзбурга – Ландау моделирует сложные нелинейные процессы в волоконных лазерах, оптоволоконных линиях связи и в других оптических устройствах (см., например, [1–4]). Компактные схемы повышенного порядка точности для одномерного уравнения Шрёдингера и уравнения Гинзбурга – Ландау хорошо себя зарекомендовали [5–10] при их сравнении с традиционными разностными схемами второго порядка точности. Однако в двумерном случае такие задачи обычно решаются со вторым порядком точности с помощью каких-либо вариантов схемы Кранка – Николсон, с расщеплением или без него [11, 12]. Между тем и для двумерных уравнений Гинзбурга – Ландау также возможно применение компактных схем. Хорошей основой для этого является классическая схема Микеладзе [13], построенная для уравнения теплопроводности, необходимо лишь провести некоторую ее модификацию и выбрать удобную форму расщепления на одномерные задачи в связи с нелинейностью и комплексностью функций в уравнении Гинзбурга – Ландау.

Уравнение Гинзбурга – Ландау в двумерном пространстве имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - G|U|^2 U + \gamma U, \quad D = \nu + \alpha i, \quad G = \kappa + \beta i. \quad (1)$$

Здесь U — искомая комплексная функция, i — мнимая единица, а входящие в уравнение коэффициенты ν , α , κ , β , γ вещественны, причем для корректности задачи требуется неотрицательность коэффициента $\nu \geq 0$. Будем рассматривать задачу Дирихле или задачу с периодическими по обоим переменным краевыми условиями для уравнения (1) в прямоугольной области $\{(x_l < x < x_r) \times (y_l < y < y_r)\}$ при изменении t в промежутке $(0 < t \leq T)$.

Заметим, что в более общем случае в правой части уравнения могут быть также слагаемые с нелинейностью пятой степени вида $|U|^4 U$, однако их отсутствие в рассматриваемой постановке не является лимитирующим фактором, так как предлагаемый в данной работе алгоритм расчета пригоден также и в этом общем случае.

Для решений уравнения Гинзбурга – Ландау характерно наличие зон больших градиентов, что требует использования достаточно детальных сеток. Использование компактных схем повышенного порядка точности вместо традиционных разностных схем позволяет в некоторой степени смягчить эти требования, что делает возможным или сократить вычислительные затраты, или существенно повысить точность при равных затратах.

Широко известные спектральные методы теоретически позволяют получить более высокую точность, чем разностные схемы, однако они весьма сложны для параллельных расчетов, которые в случае больших задач часто бывают крайне необходимыми. В противоположность спектральным методам разностные схемы легко распараллеливаются, поэтому при высоком порядке точности представляются вполне приемлемыми для решения больших задач. Таким образом, для повышения эффективности численных методов решения задач нелинейной волоконной оптики важным направлением является развитие высокоточных компактных схем. Исследования компактных разностных схем повышенной точности [5–8] свидетельствуют о перспективности этого направления.

Настоящая работа является продолжением цикла исследований авторов [7–10] и посвящена разработке и исследованию безытерационной компактной схемы типа предиктор-корректор для уравнения Гинзбурга – Ландау с двумя пространственными переменными, аналогичной схеме Микеладзе [13] для уравнения теплопроводности. Решается проблема нелинейности в правой части, излагается способ построения факторизованной схемы, исследуется ее устойчивость и приводятся результаты численных экспериментов, проведенных на нескольких тестовых задачах.

2. Разностные схемы второго и четвертого порядков точности

Если не акцентировать внимание на том, что решение и коэффициенты уравнения (1) комплексные, то легко заметить его аналогию с уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f.$$

Формальное отличие лишь в типе решения и коэффициентов, а также в специальном виде правой части

$$f = f(u) = \gamma u - G|u|^2 u.$$

Отсюда следует, что исходная схема, имеющая погрешность $O(\tau^2 + h^4)$, по аналогии с классической схемой Микеладзе [13] для уравнения теплопроводности формулируется автоматически. В нефакторизованной форме она имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = & D(\Lambda_x(\sigma_x u^{n+1} + (1 - \sigma_x)u^n) + \Lambda_y(\sigma_y u^{n+1} + (1 - \sigma_y)u^n)) + \\ & + \frac{h_x^2 + h_y^2}{12} \Lambda_x \Lambda_y u^n + \frac{f^{n+1} + f^n}{2} + \left(\frac{h_x^2}{12} \Lambda_x + \frac{h_y^2}{12} \Lambda_y \right) f^n, \end{aligned} \quad (2)$$

где h_x, h_y, τ — шаги сетки; Λ_x, Λ_y — обычные трехточечные аналоги операторов двойного дифференцирования, а весовые коэффициенты (в данном случае комплексные) связаны с соотношением шагов:

$$\sigma_x = \frac{1}{2} - \frac{1}{12r_x}, \quad \sigma_y = \frac{1}{2} - \frac{1}{12r_y}, \quad r_x = \frac{D\tau}{h_x^2}, \quad r_y = \frac{D\tau}{h_y^2}.$$

Такое же строение имеет нефакторизованная схема Кранка–Николсон

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = D(\Lambda_x + \Lambda_y) \frac{u^{n+1} + u^n}{2} + \frac{f^{n+1} + f^n}{2}.$$

Общая проблема обеих схем заключается в нелинейности правой части, и пути решения этой проблемы для них одинаковы. Заметим, что размерность пространства не играет роли, проблема та же и в трехмерном, и в одномерном случае.

Известны следующие пути решения проблемы нелинейности схем для уравнения Шрёдингера и уравнения Гинзбурга–Ландау.

1. Линейное слагаемое в правой части аппроксимируется полусуммой, а в нелинейном слагаемом u^{n+1} меняется на u^n с понижением порядка по t до первого, но с приобретением безытерационности. Возможна как полная замена $|u^{n+1}|^2 u^{n+1} \rightarrow |u^n|^2 u^n$, так и линеаризация $|u^{n+1}|^2 u^{n+1} \rightarrow |u^n|^2 u^{n+1}$.

2. Итерации по нелинейности проводятся обычным способом. Искомое решение линеаризованной схемы u^{n+1} отыскивается итеративно как текущее приближение V^{k+1} , а коэффициент в нелинейном члене $|u^{n+1}|^2$ заменяется значением с предыдущей итерации $|V^k|^2$ ($k = 0, 1, \dots$).

3. Схема, формально двухслойная, пишется с двойным шагом 2τ по слоям с номерами $n-1$ и $n+1$, но правая часть пишется не в виде полусуммы по ним, а на среднем слое

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = D(\Lambda_x + \Lambda_y) \frac{u^{n+1} + u^{n-1}}{2} + f^n.$$

4. Для переопределения коэффициента $|u^{n+1}|^2$ в нелинейном члене применяется экстраполяция с предыдущих слоев (например, $u^{n+1} \rightarrow 2u^n - u^{n-1}$).

Все эти варианты годятся также и для компактной схемы. Первый вариант является наихудшим по точности, второй сложен в реализации, а третий и четвертый ввиду трехслойности схемы имеют общий недостаток: на старте вычислений необходимо знать решение на двух слоях, тогда как в краевой задаче оно задано лишь на одном.

Между тем для обеих схем возможен иной, более простой и естественный путь, приводящий к двухслойным безытерационным схемам. А именно, согласно разложению

$$u(t + \tau) = u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau^2) = u + \tau(D\Delta u + f) + O(\tau^2)$$

(Δ — оператор Лапласа) на этапе предиктора приближенное решение на верхнем слое \tilde{u} с точностью $O(\tau^2 + h^4)$ может быть найдено из явной схемы:

$$\frac{\tilde{u} - u^n}{\tau} = D(\Lambda_x + \Lambda_y)u^n + f^n. \quad (3)$$

Затем u^{n+1} в нелинейном слагаемом схемы (2) заменяется этим приближенным решением:

$$f^{n+1} = \gamma u^{n+1} - G|u^{n+1}|^2 u^{n+1} \rightarrow \gamma u^{n+1} - G|\tilde{u}|^2 \tilde{u},$$

тогда преобразованная схема в канонической форме будет иметь вид

$$\left[\left(1 - \frac{\tau}{2}\gamma\right) E - \sigma_x D\tau\Lambda_x - \sigma_y D\tau\Lambda_y \right] \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = D\Omega u^n - \frac{G}{2} (|\tilde{u}|^2 \tilde{u} - |u^n|^2 u^n) + \Sigma f^n,$$

где

$$\Omega = \Lambda_x + \Lambda_y + \frac{h_x^2 + h_y^2}{12} \Lambda_x \Lambda_y, \quad \Sigma = E + \frac{h_x^2}{12} \Lambda_x + \frac{h_y^2}{12} \Lambda_y.$$

Для завершения построения остается нормировать схему, разделив все ее слагаемые на множитель $K = 1 - \gamma\tau/2$, и приближенно факторизовать оператор, подлежащий обращению. В результате получается безытерационная факторизованная схема

$$A_x A_y \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = d\Omega u^n - \frac{g}{2} (|\tilde{u}|^2 \tilde{u} - |u^n|^2 u^n) + \Sigma (\chi u^n - g|u^n|^2 u^n), \quad (4)$$

где операторы

$$A_x = E - \sigma_x d\tau\Lambda_x, \quad A_y = E - \sigma_y d\tau\Lambda_y$$

— одномерные трехточечные, обрабатываемые прогонкой, а $d = D/K$, $g = G/K$, $\chi = \gamma/K$ — нормированные коэффициенты. По построению компактная схема (3), (4) аппроксимирует исходное уравнение (1) с погрешностью $O(\tau^2 + h^4)$.

Точно такое же построение можно проделать на основе схемы Кранка–Николсон. Результатом будет ее безытерационный вариант типа предиктор–корректор:

$$A \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = d(\Lambda_x + \Lambda_y)u^n - \frac{g}{2} (|\tilde{u}|^2 \tilde{u} - |u^n|^2 u^n) + (\chi u^n - g|u^n|^2 u^n), \quad (5)$$

где A — факторизованный оператор вида

$$A = \left(E - \frac{d\tau}{2} \Lambda_x \right) \left(E - \frac{d\tau}{2} \Lambda_y \right),$$

а \tilde{u} также вычисляется предварительно по явной формуле (3). Схема (3), (5) имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$.

Аналогичность схем (4) и (5) заключается в использовании предиктора (3) на предварительном полушаге и замене слагаемого $|u^{n+1}|^2 u^{n+1}$ на $|\tilde{u}|^2 \tilde{u}$ на втором полушаге. Нами рассматривался также вариант линеаризации этого слагаемого заменой его на $|\tilde{u}|^2 u^{n+1}$. Однако после первых экспериментов стало ясно, что это усовершенствование устойчивости не добавляет (и без него схема устойчива), но несколько усложняет алгоритм, так как в этом случае нормирующий коэффициент K дополняется зависящим от $|\tilde{u}|^2$ слагаемым. В результате коэффициенты факторизованного оператора становятся переменными, вычислять которые необходимо в каждом узле сетки.

3. Необходимый критерий устойчивости Неймана

Исследование устойчивости схемы (4) проведем для однородной задачи с помощью гармонического анализа в предположении равных шагов по пространству. В этом случае $r_x = r_y = r$ и $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Проанализируем изменение гармоники $P^n(k_x, k_y)e^{i(k_x x + k_y y)}$ с произвольными волновыми числами k_x, k_y . Дисперсионное соотношение схемы имеет вид

$$(1 - \sigma d\tau \lambda_x)(1 - \sigma d\tau \lambda_y) \frac{\rho(k_x, k_y) - 1}{\tau} = d \left(\lambda_x + \lambda_y + \frac{h^2}{6} \lambda_x \lambda_y \right), \quad \rho(k_x, k_y) = \frac{P^{n+1}(k_x, k_y)}{P^n(k_x, k_y)},$$

где λ_x, λ_y — собственные числа операторов Λ_x, Λ_y :

$$\lambda_x = -\frac{4}{h^2} z_x, \quad \lambda_y = -\frac{4}{h^2} z_y, \quad z_x = \sin^2 \frac{k_x h}{2}, \quad z_y = \sin^2 \frac{k_y h}{2}.$$

Отсюда следует выражение для коэффициента возрастания гармоники:

$$\rho(k_x, k_y) = 1 - \frac{R(z_x + z_y - (2/3)z_x z_y)}{(1 + \sigma R z_x)(1 + \sigma R z_y)}, \quad R = 4 \frac{d\tau}{h^2}, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{3R}.$$

Ввиду тождества $\sigma R = R/2 - 1/3$ предыдущее выражение можно представить в виде произведения двух дробей

$$\rho(k_x, k_y) = \frac{1 - (R/2 + 1/3)z_x}{1 + (R/2 - 1/3)z_x} \frac{1 - (R/2 + 1/3)z_y}{1 + (R/2 - 1/3)z_y}.$$

Когда волновые числа пробегают все возможные значения, то z_x, z_y как квадраты синусов меняются в пределах единичного отрезка (0,1), поэтому условие невозрастания всех гармоник равносильно выполнению неравенства $|\rho(k_x, k_y)| \leq 1$ для всех z_x, z_y , принадлежащих отрезку (0,1). Нетрудно заметить, что в выражении для $\rho(k_x, k_y)$ каждая из двух дробей по модулю не превосходит единицу, если только вещественная часть комплексной величины R неотрицательна. Это как раз и есть условие корректности ($\nu \geq 0$) задачи для исходного уравнения (1), поскольку R пропорционально $D = \nu + \beta i$ с положительным коэффициентом. Следовательно, в принятых предположениях необходимое условие устойчивости Неймана выполнено без ограничений на соотношение шагов.

В случае схемы Кранка–Николсон аналогичные рассуждения приводят к множителю возрастания гармоник

$$\rho(k_x, k_y) = \frac{1 - (R/2)z_x}{1 + (R/2)z_x} \frac{1 - (R/2)z_y}{1 + (R/2)z_y},$$

что ровно по тем же основаниям свидетельствует о безусловном выполнении условия Неймана.

4. Результаты численных экспериментов

Было решено несколько задач с начальной функцией вида $u_0(x, y) = A_0(x, y)e^{iS_0(x, y)}$. Различие состояло в выборе начальной амплитуды $A_0(x, y)$ и фазы $S_0(x, y)$, а также в типе граничных условий — задача Дирихле или задача с периодическими по обоим переменным краевыми условиями. В случае задачи Дирихле граничные условия задавались стационарными, совпадающими с граничными значениями начальной функции.

Расчеты проводились в квадрате $(-4 < x < 4) \times (-4 < y < 4)$ с начальным числом шагов $N = 10$ по обоим переменным и некоторым числом M слоев по времени, с последующей детализацией сетки путем уменьшения пространственных шагов вдвое и шага по эволюционной переменной в четыре раза, так что отношение τ/h^2 оставалось постоянным.

Решения этих тестовых задач в формульном виде не известны, поэтому ошибка решения и реальный порядок точности оценивались апостериорно по трем расчетам на вложенных сетках.

Задача 1. В этой задаче начальная амплитуда $A_0(x, y) = e^{-2(x^2+y^2)}$ при нулевой начальной фазе $S_0(x, y) = 0$, а параметры заданы следующими:

$$\nu = \kappa = \beta = 1, \quad \alpha = 0.2, \quad \gamma = 3, \quad T = 4, \quad M = 8.$$

Начальный сигнал в данной задаче не содержит мнимой части. Результаты расчетов задачи Дирихле со стационарными граничными условиями, согласованными с начальной функцией, полученные по компактной схеме на моменты времени $t = 1, t = 2, t = 4$, представлены на рис. 1.

Апостериорные оценки ошибки и порядка точности в равномерной (δ_∞ и p_∞) и квадратичной (δ_2 и p_2) нормах приведены в табл. 1, из которой очевидно существенное

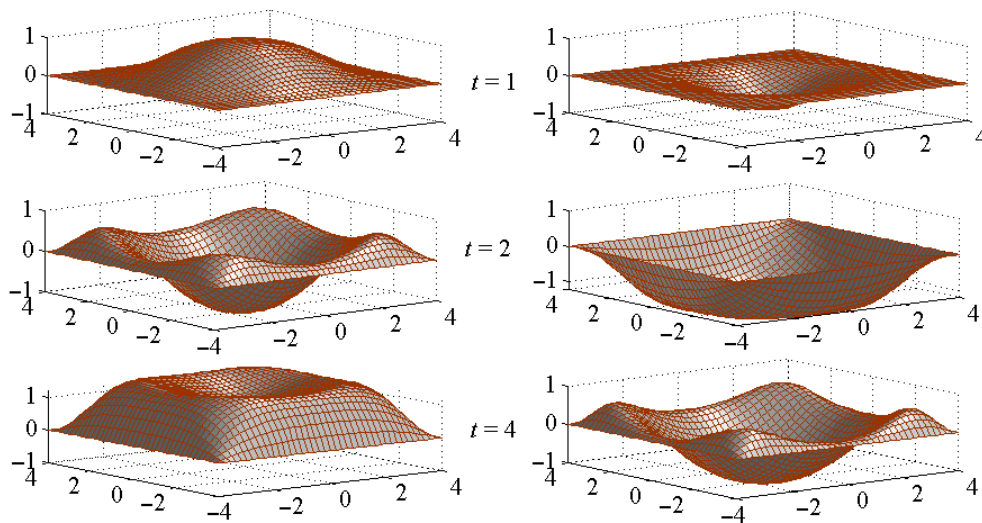


Рис. 1. Эволюция решения задачи 1, рассчитанная по компактной схеме: вещественная (слева) и мнимая (справа) части решения

Fig. 1. Evolution of the solution of problem 1 calculated using the compact scheme: real (left) and imaginary (right) parts of the solution

Т а б л и ц а 1. Результаты численного решения задачи 1 на последовательности вложенных сеток

Table 1. Results of numerical solution of the problem 1 on the sequence of embedded grids

N	Компактная схема				Схема Кранка – Николсон			
	δ_∞	p_∞	δ_2	p_2	δ_∞	p_∞	δ_2	p_2
20	7.1e-01	—	1.9e+00	—	7.8e-01	—	1.9e+00	—
40	5.8e-02	3.64	2.2e-01	3.10	6.7e-02	3.55	2.4e-01	3.02
80	3.1e-03	4.23	1.7e-02	3.73	7.0e-03	3.27	2.9e-02	3.06
160	1.8e-04	4.07	1.4e-03	3.57	1.3e-03	2.47	6.5e-03	2.14

преимущество компактной схемы. Заметим, что таблицы с результатами численного решения всех следующих ниже задач имеют такую же структуру, как табл. 1.

Задача 2. Здесь амплитуда и фаза порождают начальное данное, симметричное относительно как осей координат, так и прямых $y = \pm x$:

$$A_0(x, y) = e^{-2(x^2+y^2)}, \quad S_0(x, y) = (e^{x+y} + e^{-x-y})^{-1}.$$

При этом распределение начальной мощности сигнала в задачах 1 и 2 совпадает. Различие состоит в том, что в задаче 2 начальное данное не является чисто вещественным. Параметры задачи:

$$\nu = \kappa = \beta = 1, \quad \alpha = 0.5, \quad \gamma = 3, \quad T = 12, \quad M = 96.$$

Граничные условия стационарные, порожденные начальным полем.

Результаты решения задачи 2 по компактной схеме приведены на рис. 2. Здесь представлена эволюция мощности сигнала $E(x, y) = |u(x, y, t)|^2$. Апостериорные оценки норм ошибок и порядков точности для задачи 2 даны в табл. 2.

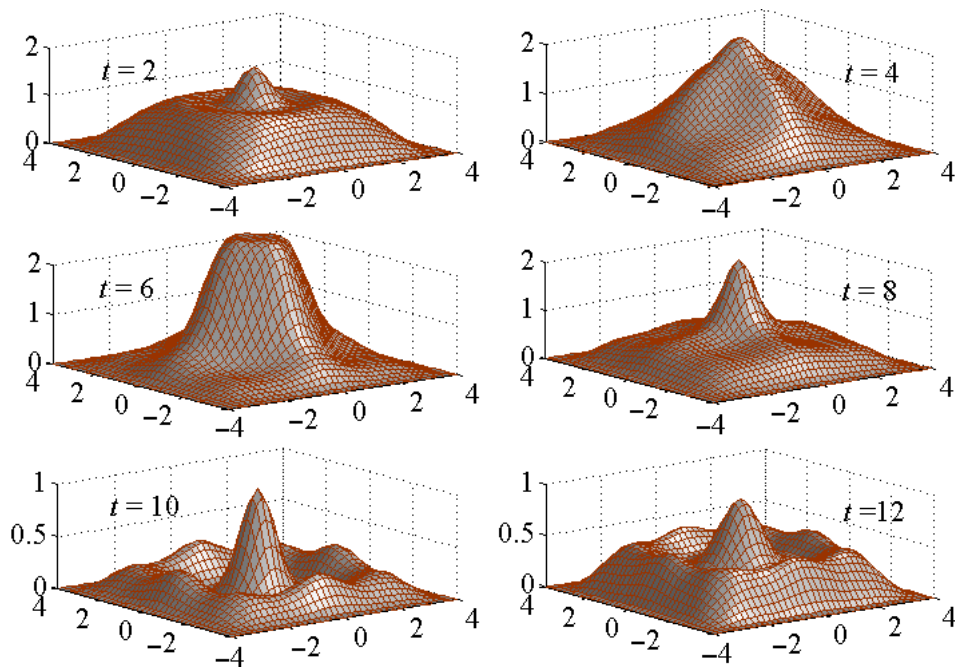


Рис. 2. Распределение мощности сигнала в различные моменты времени в задаче 2
Fig. 2. Signal power at different moments of time in the problem 2

Т а б л и ц а 2. Результаты численного решения задачи 2 на последовательности вложенных сеток

Table 2. Results of numerical solution of problem 2 on the sequence of embedded grids

N	Компактная схема				Схема Кранка – Николсон			
	δ_∞	p_∞	δ_2	p_2	δ_∞	p_∞	δ_2	p_2
20	3.0e-01	—	8.3e-01	—	3.2e-01	—	8.3e-01	—
40	1.6e-02	4.22	6.2e-02	3.73	2.4e-02	3.76	8.5e-02	3.29
80	9.1e-04	4.13	5.0e-03	3.63	2.9e-03	3.04	1.4e-02	2.63
160	5.5e-05	4.03	4.3e-04	3.54	5.5e-04	2.39	3.5e-03	1.96

Задача 2а. Отличается от задачи 2 промежутком изменения времени и граничными условиями — здесь они периодичны по обоим переменным. Результаты расчетов с помощью компактной схемы приведены на рис. 3. На первом графике начальная стадия распространения сигнала, на втором — развитие, на третьем графике волна прошла середины границ квадрата, на которых начался рост мощности, и доходит до углов, на четвертом волной пройдены и углы квадрата. Следует заметить, что при периодических условиях решение имеет меньшие градиенты, чем при закрепленных значениях на границе. В задачах Дирихле (1 и 2) из-за отражения от границ наблюдаются более крутые профили.

Задача 3. Плоская волна. Для этой задачи заранее известно точное решение:

$$u(x, y, t) = e^{i\xi(x+y)-2\omega t}, \quad \xi = \pi/3, \quad \omega = 2\alpha\xi^2 + \beta.$$

Параметры уравнения:

$$\alpha = 0.2, \quad \nu = \kappa = \beta = 1, \quad \gamma = 1 + 2\xi^2.$$

Расчет проводился в квадрате $(-1 < x < 1) \times (-1 < y < 1)$ на временном промежутке $(0 < t \leq 1)$, пространственная сетка использовалась квадратная с начальным шагом $h = 0.2$, начальное число шагов по времени $M = 8$. В процессе детализации сетки контролировалось изменение ошибки и вычислялся реально достигнутый порядок точности.

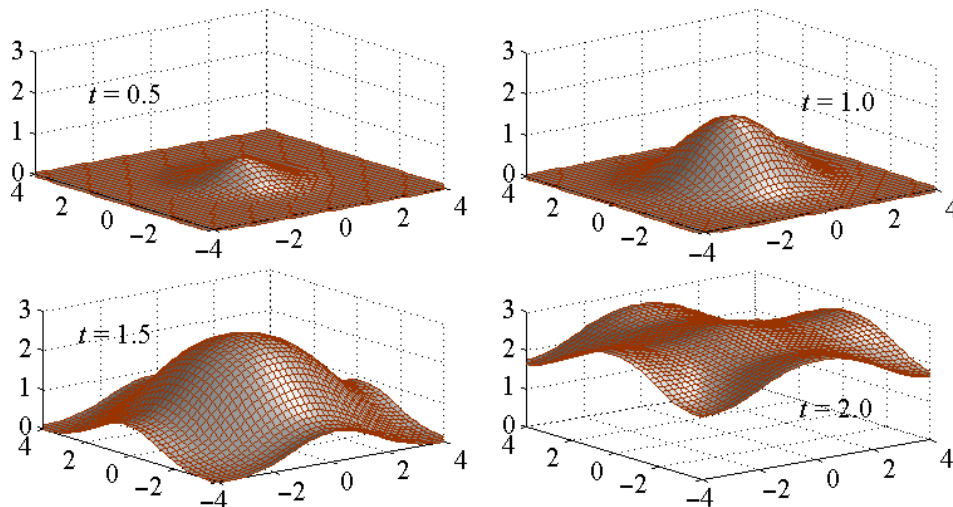


Рис. 3. Эволюция мощности $E = |u(x, y, t)|^2$ в задаче 2а
Fig. 3. Power evolution $E = |u(x, y, t)|^2$ in the problem 2а

Т а б л и ц а 3. Результаты расчета плоской волны на последовательности вложенных сеток
Table 3. Results of plane wave calculation on the sequence of embedded grids

N	Компактная схема				Схема Кранка – Николсон			
	δ_∞	p_∞	δ_2	p_2	δ_∞	p_∞	δ_2	p_2
10	1.0e-02	6.63	2.4e-02	5.39	1.0e-02	6.63	2.4e-02	5.40
20	5.4e-04	4.23	1.8e-03	3.73	1.0e-03	3.30	3.3e-03	2.83
40	3.2e-05	4.06	1.6e-04	3.56	2.4e-04	2.07	1.1e-03	1.57
80	2.0e-06	4.01	1.3e-05	3.52	6.1e-05	1.98	4.0e-04	1.48

В табл. 3 для двух схем приведены ошибки и оценки порядка точности в равномерной (δ_∞ и p_∞) и квадратичной (δ_2 и p_2) нормах. В данной задаче точное решение известно, поэтому нормы ошибки вычислялись непосредственно, а порядки оценивались по расчетам на двух, а не на трех сетках.

Заметим, что результаты, приведенные выше в графической форме, получены по компактной схеме. Результаты, полученные по схеме Кранка–Николсон, не приводятся в виде поверхностей, так как на достаточно детальных сетках они визуально сливались бы с результатами, полученными по высокоточной схеме. Однако по каждой из таблиц легко заметить значительное преимущество компактной высокоточной схемы. При этом в равномерной норме во всех тестовых задачах для компактной схемы наблюдается удовлетворительное приближение апостериорной оценки порядка точности к теоретической четверке.

5. Методика оценки ошибки и порядка точности

Апостериорная оценка ошибки и порядка точности в случае неизвестного точного решения осуществлялась следующим образом. Пусть зафиксирован произвольно внутренний узел квадратной сетки с шагом h на произвольном слое по времени. Благодаря связи $\tau/h^2 = \text{const}$ погрешность можно считать не зависящей от τ , и ввиду вложенности сеток приближенные решения в фиксированной точке на трех последовательных сетках представляются в виде

$$u_h \approx U + ch^p, \quad u_{h/2} \approx U + c(h/2)^p, \quad u_{h/4} \approx U + c(h/4)^p,$$

где U — локальное значение точного решения; p — порядок точности; c — константа, одна и та же для данной точки, а под $u_{h/2}$ и $u_{h/4}$ подразумеваются проекции соответствующих решений на сетку с шагом h .

Из системы трех приближенных равенств следует

$$\frac{u_h - U}{u_{h/2} - U} \approx \frac{u_{h/2} - U}{u_{h/4} - U},$$

откуда (если приближенное равенство заменить точным) однозначно вычисляется локальное значение скорректированного решения U . Проведя эту процедуру для всех узлов грубой сетки с шагом h , вычислим сеточную функцию U как результат коррекции по трем приближенным решениям, по построению имеющий более высокий порядок точности, чем исходные приближенные решения. Тогда локальное значение порядка точности определится из равенства $|u_h - U| = 2^p |u_{h/2} - U|$, а локальная ошибка на сетке с шагом h оценится как $\delta_h(x, y) = |u_h - U|$. Норму ошибки при этом естественно вычислять как $\delta_h = \|u_h - U\|$, а с определением порядка точности возникает некоторое затруднение.

Проблема в том, что вычисленное по такой методике значение порядка меняется от узла к узлу, и обычно оценку порядка осуществляют не по максимальному из локальных значений, а из равенства для норм $\|u_h - U\| = 2^p \|u_{h/2} - U\|$ в предположении постоянства порядка. Вполне корректным это равенство является для равномерной нормы при естественном предположении, что максимумы модуля ошибки для решения на грубой сетке и ошибки для проекции на нее решения с подробной сетки достигаются в одном и том же узле. Для норм с глобальной зависимостью от компонент сеточной функции

этой формулой для определения порядка пользуются как приближенной, но это может иногда приводить к сюрпризам. В данной работе ошибка оценивалась в двух нормах — равномерной и квадратичной.

Амплитуда начальной функции представляла собой поверхность вращения в виде “шапочки” в окрестности оси $x = y = 0$ с быстрым асимптотическим убыванием к нулю по мере удаления от оси. Хотя со временем волна распространяется к периферии, в таких условиях “на бесконечности” все производные решения близки к нулю и локальные значения константы c в главном члене разложения ошибки $u_h - U \approx ch^p$ малы. Поэтому из-за погрешностей округления соответствующие слагаемые ошибки в квадратичной норме имеют случайный характер, и хотя они малы, но в совокупности неизбежно влияют на результат вычисления порядка точности. Вычисления в равномерной норме свободны от этого недостатка, так как максимум модуля ошибки достигается явно не в области асимптотического приближения решения к нулю, а в конкретном узле в области существенного изменения решения, где константа c не близка к нулю, и значение нормы ошибки никак не зависит от ее распределения в остальной сеточной области.

Очевидно, именно поэтому во всех приведенных выше табличных данных оценки порядка в равномерной норме приближаются к теоретическим значениям (или превышают их, что допустимо), а в квадратичной норме они несколько занижены. Таким образом, при оценке порядка точности равномерная норма по изложенной выше причине заслуживает большего доверия, чем другие нормы, и является более предпочтительной.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-11-20040.

Список литературы

- [1] **Akhmediev N.N., Afanasiev V.V.** Singularities and special soliton solutions of the cubicquintic complex Ginsburg–Landau equation. *Physical Review E*. 1996; 53(1):1190–1201.
- [2] **Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.** Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М.: Физматлит; 2005: 647.
- [3] **Agrawal G.P.** Nonlinear fiber optics. N.Y.: Academic Press; 2001: 446.
- [4] **Agrawal G.P.** Applications of nonlinear fiber optics. N.Y.: Academic Press; 2001: 458.
- [5] **Xie S.-S., Li G.-X., Yi S.** Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009; (198):1052–1061.
- [6] **Wang T.** Convergence of an eighth-order compact difference schemes for the nonlinear Schrödinger equation. *Advances in Numerical Analysis*. 2012; (2012):Article ID 913429. DOI:10.1155/2012/913429. Available at: <https://www.hindawi.com/journals/ana/2012/913429>.
- [7] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Компактная диссипативная схема для нелинейного уравнения Шрёдингера. *Вычислительные технологии*. 2011; 16(6):68–73.
- [8] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Компактная безытерационная схема с искусственной диссипацией для нелинейного уравнения Шрёдингера. *Вычислительные технологии*. 2012; 17(3):83–90.

- [9] Паасонен В.И., Федорук М.П. Трехслойная безитерационная схема повышенного порядка точности для уравнения Гинзбурга–Ландау. Вычислительные технологии. 2015; 20(3):46–57.
- [10] Паасонен В.И., Федорук М.П. Об эффективности высокоточных разностных схем для уравнения Шрёдингера. Вычислительные технологии. 2021; 26(6):68–81.
- [11] Xu Q.B., Chang Q.S. Difference methods for computing the Ginzburg–Landau equation in two dimensions. Numerical Methods Partial Differential Equation. 2011; (27):507–528.
- [12] Wang T.C., Guo B.L. Analysis of some finite difference schemes for two dimensional Ginzburg–Landau equation. Numerical Methods Partial Differential Equation. 2011; (27):1340–1363.
- [13] Микеладзе Ш.Е. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов. Известия АН СССР. Серия математика. 1941; 5(1):57–74.

Вычислительные технологии, 2022, том 27, № 6, с. 58–69. © ФИЦ ИВТ, 2022
Computational Technologies, 2022, vol. 27, no. 6, pp. 58–69. © FRC ICT, 2022

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.006

The compact iteration-free difference scheme for the two-dimensional Ginzburg–Landau equation

PAASONEN VIKTOR I.^{1,2,*}, FEDORUK MIKHAIL P.^{1,2}

¹Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Paasonen Viktor I., e-mail: paas@ict.nsc.ru

Received March 24, 2022, revised June 09, 2022, accepted June 28, 2022.

Abstract

This paper represents an extension of the series of articles which addressed high-accuracy compact schemes for the equations of nonlinear wave optics. The subject of the study is both the Dirichlet problem and the periodic boundary value problem for the Ginzburg–Landau equation in a two-dimensional rectangular domain. For simplicity, we consider an equation with only third-degree nonlinearity, although the absence of terms of the fifth degree is not a limiting factor for the application of the proposed algorithm in the general case.

For the numerical solution of the problem, a compact fourth-order difference scheme similar to the classical Mikeladze scheme for the two-dimensional heat conduction equation is constructed. The nonlinear term problem is solved without an iterative process. Instead, the value of the solution on the upper layer is pre-computed from the explicit scheme, and the obtained result is substituted in the right side of the main scheme to approximate the nonlinear term. Thus, the scheme as a whole has a predictor-corrector structure. By the way, a similar non-intermediate version of the Crank-Nicholson scheme is formulated.

By means of harmonic analysis, the stability of both schemes in linear approximation is investigated. The results of calculations using the compact scheme are presented in comparison with calculations using the Crank–Nicholson scheme. Problems with three different initial amplitude and initial phase assignments, as well as the problem with the exact plane wave solution, were taken as test model problems. By calculations on a sequence of condensing grids, posterior estimates of solution errors and real orders of accuracy in uniform and quadratic norms are obtained.

Keywords: Ginzburg–Landau equation, compact difference scheme, high-order accuracy, iteration-free scheme, nonlinear fiber optics.

Citation: Paasonen V.I., Fedoruk M.P. The compact iteration-free difference scheme for the two-dimensional Ginzburg–Landau equation. Computational Technologies. 2022; 27(6):58–69. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.006. (In Russ.)

Acknowledgements. This research was supported by Russian Science Foundation (project No. 20-11-20040).

References

1. **Akhmediev N.N., Afanasiev V.V.** Singularities and special soliton solutions of the cubicquintic complex Ginsburg–Landau equation. Physical Review E. 1996; 53(1):1190–1201.
2. **Kivshar’ Yu.S., Agraval G.P.** Opticheskie solitony. Ot volokonnykh svetovodov k fotonnym kristallam [Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals]. Moscow: Fizmatlit; 2005: 647. (In Russ.)
3. **Agrawal G.P.** Nonlinear fiber optics. N.Y.: Academic Press; 2001: 446.
4. **Agrawal G.P.** Applications of nonlinear fiber optics. N.Y.: Academic Press; 2001: 458.
5. **Xie S.-S., Li G.-X., Yi S.** Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2009; (198):1052–1061.
6. **Wang T.** Convergence of an eighth-order compact difference schemes for the nonleniar Shrödinger equation. Advances in Numerical Analysis. 2012; (2012):Article ID 913429. DOI:10.1155/2012/913429. Available at: <https://www.hindawi.com/journals/ana/2012/913429>.
7. **Paasonen V.I., Fedoruk M.P.** A compact dissipative scheme for the nonlinear Schrödinger equation. Computational Technologies. 2011; 16(6):68–73. (In Russ.)
8. **Paasonen V.I., Fedoruk M.P.** A compact noniterative scheme with artificial dissipation for nonlinear Schrödinger equation. Computational Technologies. 2012; 17(3):83–90. (In Russ.)
9. **Paasonen V.I., Fedoruk M.P.** Three-level non-iterative high accuracy scheme for Ginzburg–Landau equation. Computational Technologies. 2015; 20(3):46–57. (In Russ.)
10. **Paasonen V.I., Fedoruk M.P.** On the efficiency of high-order difference schemes for the Schrödinger equation. Computational Technologies. 2021; 26(6):68–81. (In Russ.)
11. **Xu Q.B., Chang Q.S.** Difference methods for computing the Ginzburg–Landau equation in two dimensions. Numerical Methods Partial Differential Equation. 2011; (27):507–528.
12. **Wang T.C., Guo B.L.** Analysis of some finite difference schemes for two dimensional Ginzburg–Landau equation. Numerical Methods Partial Differential Equation. 2011; (27):1340–1363.
13. **Mikeladze Sch.** Numerische integration der gleichungen vom elliptischen und parabolischen typus. Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya. 1941; 5(1):57–74. (In Russ.)